№14 дәріс сабағы

3.6 Интервалдық бағалар. Сенімділік интервалы. Математикалық күтім, дисперсия, орта квадраттық ауытқудың нормаль үлестрімі үшін сенімділік интервалдары.

Нүктелік бағалардан басқа сенімділік интервалдары да қолданылады: $\alpha^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ бір нүкте емес, ал $P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \gamma$ берілген ықтималдықпен α параметрінің ақиқат мәні сәйкес келетін $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ аралығы қарастырылады.

$0 < \gamma < 1$ аралығындағы γ саны сенімділік ықтималдығы деп аталады және алынған бағаның үміттілігін көрсетеді, γ саны 1-ге жуық болса, соғұрлым баға үмітті болады, (көп жағдайда $\gamma = 0{,}9$; 0,95 немесе 0,99 таңдайды).

$\underline{\alpha}$ және $\overline{\alpha}$ шамалары сенімділік шекаралары деп аталады. Олар таңдалған мәндердің $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x_1, x_2, .. x_n)$ функциялары, сондықтан кездейсоқ шамалар болады.

$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x_1, x_2, .. x_n)$ кездейсоқ шекаралары бар $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ интервалы $P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \gamma$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда α белгісіз параметрінің сенімділік интервалы деп аталады.

Сенімділік интервалдарының мысалдары

1. a математикалық күтімі үшін σ^2 белгілі дисперсия жағдайында қалыпты кездейсоқ шаманың сенімділік интервалы түрі:

$$\overline{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

мұндағы $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, ал t шамасы $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ -ге сәйкес келетін Лаплас функциясының аргументінің мәні (2-қосымша, 2-кесте).

2. a математикалық күтімі үшін σ^2 белгісіз дисперсия жағдайында қалыпты кездейсоқ шаманың сенімділік интервалы түрі:

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

мұндағы $\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ формуласымен есептеледі, t_γ шамасы берілген γ сенімділік ықтималдығы және n таңдама көлемі бойынша кесте көмегімен анықталады (2-қосымша, 5-кесте).

3. σ^2 дисперсия жағдайында қалыпты кездейсоқ шаманың сенімділік интервалы түрі:

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

мұндағы n - таңдама көлемі, σ^*- жоғарыда көрсетілген формула бойынша анықталған σ шамасының бағасы, $\chi^2_{(1)}$ және $\chi^2_{(2)}$ дегеніміз -

$$\int_0^{\chi^2_{(1)}} f_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}, \quad \int_{\chi^2_{(2)}}^{+\infty} f_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2},$$

теңдеулерінің түбірлері, ал интеграл астындағы $f_{n-1}(x)$ функциясы $n-1$ еркіндік дәрежелі хи-квадраттың үлестірім тығыздығын береді. Бұл теңдеулер берілген γ сенімділік ықтималдығымен кесте көмегімен шешіледі (2-қосымша, 3-кесте). $\chi^2_{(1)}$ анықтағанда $v=n-1$ және $\alpha=\frac{1+\gamma}{2}$ арқылы кестені, ал $\chi^2_{(2)} - v=n-1$; анықтағанда $\alpha=\frac{1-\gamma}{2}$ арқылы берілген кестені қолданамыз.

4. n - тәуелсіз сынақтар саны, m - A оқиғасының орындалу саны, p - әрбір сынақта A оқиғасының орындалу ықтималдығы. n жеткілікті түрде үлкен, ал p ықтималдығы не нөлге, не бірге де жуық емес жағдайында, Лапластың асимптоталық формуласын қолдануға болады. p үшін сенімділік интервалының түрі:

$$\frac{m}{n+t^2} < p < \frac{m+t^2}{n+t^2},$$

ал t шамасы $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ -ге сәйкес келетін Лаплас функциясының аргументінің мәні (2-қосымша, 2-кесте).

$m=0$ жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда төменгі сенімділік шекарасы нөлге тең, ал жоғарғы шекарасы $1-\sqrt[n]{1-\gamma}$ тең. Осылайша, $m=n$ болса, онда төменгі және жоғарғы сенімділік шекаралары сәйкес $\sqrt[n]{1-\gamma}$ және бірге тең.